Fonctions numériques

$\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ désignent des parties de $\mathbb{R}$.

I. Fonctions réelles

1°) Définitions générales

Déf : On appelle fonction réelle définie sur $\mathcal{D}$ toute application $f:\mathcal{D}\to\mathbb{R}$.
$\mathcal{D}$ est alors appelé ensemble de définition de f, on note parfois $\mathcal{D}=\mathcal{D}_f$.
On note $\mathcal{F}(\mathcal{D},\mathbb{R})$ l'ensemble de ces applications.

Déf : On appelle graphe (ou courbe représentative) d'une fonction $f:\mathcal{D}\to\mathbb{R}$ l'ensemble
$\Gamma_f=\{M(x,y)/\,x\in\mathcal{D} \text{ et } y=f(x)\}$.

Déf : Une fonction $f:\mathcal{D}\to\mathbb{R}$ est dite constante ssi $\exists C\in\mathbb{R},\forall x\in\mathcal{D},f(x)=C$.
Une telle fonction est alors dite constante égale à C et est notée parfois C.

Déf : On appelle valeur absolue d'une fonction $f:\mathcal{D}\to\mathbb{R}$ la fonction $|f|:\mathcal{D}\to\mathbb{R}$ définie par $|f|(x)=|f(x)|$.

Prop : Soit $f:\mathcal{D}\to\mathbb{R}$. On a équivalence entre :
(i) f est bornée,
(ii) $\exists M\in\mathbb{R},\forall x\in\mathcal{D},|f(x)|\le M$,
(iii) $|f|$ est majorée.

Prop : Soit $f,g:\mathcal{D}\to\mathbb{R}$.
On définit les fonctions $\sup(f,g):\mathcal{D}\to\mathbb{R}$ et $\inf(f,g):\mathcal{D}\to\mathbb{R}$ par :
$\forall x\in\mathcal{D}$, $\sup(f,g)(x)=\max(f(x),g(x))$ et $\inf(f,g)(x)=\min(f(x),g(x))$.

2°) Opérations sur les fonctions numériques

Déf : Soit $f,g:\mathcal{D}\to\mathbb{R}$ et $\lambda\in\mathbb{R}$.
On définit les $\lambda.f$, $f+g$ et fg de $\mathcal{D}$ vers $\mathbb{R}$ par : $\forall x\in\mathcal{D},(\lambda.f)(x)=\lambda f(x)$, $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$ et $(fg)(x)=f(x)g(x)$.
Si de plus g ne s'annule pas, on définit les fonctions $1/g$ et f/g de $\mathcal{D}$ vers $\mathbb{R}$ par :
$\forall x\in\mathcal{D},(1/g)(x)=1/g(x)$ et $f/g=f\times 1/g$.

Prop : Soit $f,g:\mathcal{D}\to\mathbb{R}$ et $\lambda\in\mathbb{R}$.
Si f et g sont bornées alors $\lambda.f, f+g$ et fg le sont aussi.

3°) Parité

Déf : Une fonction $f:\mathcal{D}\to\mathbb{R}$ est dite paire (resp. impaire) ssi :
1) $\mathcal{D}$ est symétrique par rapport à 0 i.e. : $\forall x\in\mathcal{D},-x\in\mathcal{D}$.
2) $\forall x\in\mathcal{D},f(-x)=f(x)$ (resp. $f(-x)=-f(x)$).

Prop : Soit $f:\mathcal{D}\to\mathbb{R}$ et $\varphi:\mathcal{D}'\to\mathbb{R}$ telles que $f(\mathcal{D})\subset\mathcal{D}'$.
Si f est paire alors $\varphi\circ f$ l'est aussi.
Si f est impaire et φ paire alors $\varphi\circ f$ est paire.
Si f est impaire et φ impaire alors $\varphi\circ f$ est impaire.

4°) Périodicité

Déf : Une fonction $f:\mathcal{D}\to\mathbb{R}$ est dite T périodique ssi :
1) $\mathcal{D}$ est T périodique i.e. $\forall x\in\mathcal{D},x+T\in\mathcal{D}$,
2) $\forall x\in\mathcal{D},f(x+T)=f(x)$.

Déf : Une fonction f est dite périodique ssi il existe $T\neq 0$ telle qu'elle soit T périodique.

Prop : Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.
Si f est T périodique alors $\forall x\in\mathbb{R},\forall k\in\mathbb{Z},f(x+kT)=f(x)$.

5°) Lipschitzianité

Déf : Soit $f:\mathcal{D}\to\mathbb{R}$ et $k\in\mathbb{R}^+$. On dit que f est k lipschitzienne ssi
$\exists k\in\mathbb{R}^+, \forall x,y\in\mathcal{D}, \left|f(y)-f(x)\right|\le k\left|y-x\right|$.

Déf : Une fonction $f:\mathcal{D}\to\mathbb{R}$ est dite lipschitzienne ssi $\exists k\in\mathbb{R}^+$ tel qu'elle soit k lipschitzienne.

Prop : Soit $f,g:\mathcal{D}\to\mathbb{R}$ et $\lambda\in\mathbb{R}$.

Si f est k lipschitzienne alors $\lambda.f$ est $\left|\lambda\right|k$ lipschitzienne.

Si f et g sont k et k' lipschitziennes alors $f+g$ est $k+k'$ lipschitzienne.

Prop : Soit $f:\mathcal{D}\to\mathbb{R}$ et $\varphi:\mathcal{D}'\to\mathbb{K}$ telles que $f(\mathcal{D})\subset\mathcal{D}'$.

Si f et φ sont k et k' lipschitziennes alors $\varphi\circ f$ est kk' lipschitzienne.

6°) Propriété vraie sur une partie

Déf : Soit $f:\mathcal{D}\to\mathbb{R}$, $\Delta\subset\mathcal{D}$.
On dit que f présente une propriété sur Δ ssi $f_{|\Delta}$ présente cette propriété.

Déf : Soit $a\in\mathbb{R}$, on appelle voisinage de a tout ensemble $V=\left[a-\alpha,a+\alpha\right]$ avec $\alpha>0$.

Déf : On appelle voisinage de $+\infty$ (resp. $-\infty$) tout ensemble de la forme $V=\left[A,+\infty\right[$ (resp. $V=\left]-\infty,A\right]$) avec $A\in\mathbb{R}$.

Déf : Soit $f:\mathcal{D}\to\mathbb{R}$ et $a\in\overline{\mathbb{R}}$. On dit que f est définie au voisinage de a ssi pour tout V voisinage de a, on a $V\cap\mathcal{D}\neq\varnothing$.

Déf : Soit $f:\mathcal{D}\to\mathbb{R}$ une fonction définie au voisinage de $a\in\overline{\mathbb{R}}$.
On dit que f présente une propriété au voisinage de a ssi il existe un voisnage V de a tel que f présente la propriété sur $V\cap\mathcal{D}$.

II. Limites d'une fonction réelle

Soit $f,g,h:\mathcal{D}\to\mathbb{R}$ trois fonctions définies au voisinage de $a\in\overline{\mathbb{R}}$.

1°) Limite finie

a) définition

Déf : On dit que $f:\mathcal{D}\to\mathbb{R}$ tend vers $\ell\in\mathbb{R}$ en a ssi
$\forall\varepsilon>0,\exists V$ voisinage de a tel que $\forall x\in\mathcal{D}, x\in V\Rightarrow\left|f(x)-\ell\right|\le\varepsilon$.
On note alors $f\underset{a}{\to}\ell$, $f(x)\xrightarrow[x\to a]{}\ell$ ou $f(x)\xrightarrow[\substack{x\to a\\ x\in\mathcal{D}}]{}\ell$

Ainsi :
Cas $a\in\mathbb{R}$: $f\underset{a}{\to}\ell\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists\alpha>0,\forall x\in\mathcal{D},\left|x-a\right|\le\alpha\Rightarrow\left|f(x)-\ell\right|\le\varepsilon$.
Cas $a=+\infty$: $f\underset{+\infty}{\to}\ell\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists A\in\mathbb{R},\forall x\in\mathcal{D},x\ge A\Rightarrow\left|f(x)-\ell\right|\le\varepsilon$
Cas $a=-\infty$: $f\underset{-\infty}{\to}\ell\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists A\in\mathbb{R},\forall x\in\mathcal{D},x\le A\Rightarrow\left|f(x)-\ell\right|\le\varepsilon$.

Prop : Si f est définie en $a\in\mathbb{R}$ et $f\underset{a}{\to}\ell$ alors $\ell=f(a)$. On dit alors que f est continue en a.

Prop : Soit $\ell\in\mathbb{R}$. $f\underset{a}{\to}\ell\Leftrightarrow\left|f(x)-\ell\right|\underset{x\to a}{\to}0$,

b) convergence et divergence

Déf : On dit que f converge en a ssi $\exists\ell\in\mathbb{R}$ tel que $f\underset{a}{\to}\ell$.

Sinon, on dit que f diverge en a.

Théorème :

Si f converge en a alors $\exists!\ell\in\mathbb{R}$ tel que $f\underset{a}{\to}\ell$.

Ce réel ℓ est alors appelé limite de f en a et on note $\ell=\lim\limits_{a}f=\lim\limits_{x\to a}f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\in\mathcal{D}}}f(x)$.

c) limite finie et relation d'ordre

Théorème :

Si f converge en a alors f est bornée au voisinage de a.

Prop : Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $\ell \in \mathbb{R}$

Si $f \underset{a}{\to} \ell$ et $\ell > \alpha$ alors au voisinage de a : $f(x) > \alpha$.

Si $f \underset{a}{\to} \ell$ et $\ell < \beta$ alors au voisinage de a : $f(x) < \beta$.

Si $f \underset{a}{\to} \ell$ et $\alpha < \ell < \beta$ alors au voisinage de a : $\alpha < f(x) < \beta$.

Théorème :

Soit $f, g : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ telles que $f \leq g$ au voisinage de a.

Si $f \underset{a}{\to} \ell$ et $g \underset{a}{\to} \ell'$ alors $\ell \leq \ell'$.

2°) Limites infinies

a) définition

Déf : On dit que f tend vers $+\infty$ en a ssi

$\forall A \in \mathbb{R}, \exists V$ voisinage de a tel que $\forall x \in \mathcal{D}, x \in V \Rightarrow f(x) \geq A$.

On note alors $f \underset{a}{\to} +\infty$ ou $f(x) \underset{x \to a}{\to} +\infty$.

Ainsi :

Cas $a \in \mathbb{R}$: $f \underset{a}{\to} +\infty \Leftrightarrow \forall A \in \mathbb{R}, \exists \alpha > 0, \forall x \in \mathcal{D}, |x - a| \leq \alpha \Rightarrow f(x) \geq A$.

Cas $a = +\infty$: $f \underset{+\infty}{\to} +\infty \Leftrightarrow \forall A \in \mathbb{R}, \exists A' \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathcal{D}, x \geq A' \Rightarrow f(x) \geq A$.

Cas $a = -\infty$: $f \underset{-\infty}{\to} +\infty \Leftrightarrow \forall A \in \mathbb{R}, \exists A' \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathcal{D}, x \leq A' \Rightarrow f(x) \geq A$.

Déf : On dit que f tend vers $-\infty$ en a ssi

$\forall B \in \mathbb{R}, \exists V$ voisinage de a, $\forall x \in \mathcal{D}, x \in V \Rightarrow f(x) \leq B$.

On note alors $f \underset{a}{\to} -\infty$ ou $f(x) \underset{x \to a}{\to} -\infty$.

Prop : $f \underset{a}{\to} -\infty \Leftrightarrow -f \underset{a}{\to} +\infty$.

b) limites infinies et relation d'ordre

Prop : Si $f \underset{a}{\to} +\infty$ alors f est minorée mais non majorée au voisinage de a.

Si $f \underset{a}{\to} -\infty$ alors f est majorée mais non minorée au voisinage de a.

Déf : Si $f \underset{a}{\to} +\infty$ (resp. $f \underset{a}{\to} -\infty$) alors on dit que f diverge vers $+\infty$ en a (resp. $-\infty$) et on note

$\lim\limits_{a} f = \lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f(x) = +\infty$ (resp. $-\infty$).

3°) Opérations sur les limites

a) caractérisation séquentielle des limites

Théorème :

Soit $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ définie au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$ et $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$.

On a équivalence entre :

(i) $f \underset{a}{\to} \ell$,

(ii) $\forall (u_n) \in \mathcal{D}^{\mathbb{N}}, u_n \to a \Rightarrow f(u_n) \to \ell$.

b) sommes, produits & Cie

Théorème :

Supposons $f \underset{a}{\to} \ell \in \overline{\mathbb{R}}$ et $g \underset{a}{\to} \ell' \in \overline{\mathbb{R}}$.

Si $\ell + \ell'$ est définie dans $\overline{\mathbb{R}}$ alors $f + g \underset{a}{\to} \ell + \ell'$.

Si $\ell\ell'$ est définie dans $\overline{\mathbb{R}}$ alors $fg \underset{a}{\to} \ell\ell'$.

Déf : Soit $\ell \in \mathbb{R}$. On note $f \underset{a}{\to} \ell^+$ (resp. $f \underset{a}{\to} \ell^-$) pour signifier que $f \underset{a}{\to} \ell$ et que $f(x) > \ell$ (resp. $f(x) < \ell$) au voisinage de a .

Théorème :

Si $f \underset{a}{\to} \ell \in \mathbb{R}^*$ alors $1/f \underset{a}{\to} 1/\ell$.

Si $f \underset{a}{\to} 0^+$ alors $1/f \underset{a}{\to} +\infty$.

Si $f \underset{a}{\to} 0^-$ alors $1/f \underset{a}{\to} -\infty$.

Si $f \underset{a}{\to} +\infty$ alors $1/f \underset{a}{\to} 0^+$.

Si $f \underset{a}{\to} -\infty$ alors $1/f \underset{a}{\to} 0^-$.

Théorème :

Soit $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ et $\varphi : \mathcal{D}' \to \mathbb{R}$ telles que $f(\mathcal{D}) \subset \mathcal{D}'$.

Si $f \underset{a}{\to} b \in \overline{\mathbb{R}}$ et $\varphi \underset{b}{\to} \ell \in \overline{\mathbb{R}}$ alors $\varphi \circ f \underset{a}{\to} \ell$.

4°) Théorèmes de comparaison

Théorème :

Soit $\ell \in \mathbb{R}$.

Si $|f(x) - \ell| \leq g(x)$ au voisinage de a et $g(x) \underset{x \to a}{\to} 0$ alors $f(x) \underset{x \to a}{\to} \ell$.

Prop : Soit $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$. Si $f \underset{a}{\to} \ell \in \mathbb{R}$ alors $|f| \underset{a}{\to} |\ell|$.

Prop : Soit $f, g : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$.

Si f est bornée au voisinage de a et $g \underset{a}{\to} 0$ alors $fg \underset{a}{\to} 0$.

Théorème :

Supposons $f(x) \leq g(x)$ au voisinage de a .

Si $f \underset{a}{\to} +\infty$ alors $g \underset{a}{\to} +\infty$.

Si $g \underset{a}{\to} -\infty$ alors $f \underset{a}{\to} -\infty$.

Théorème : (des gendarmes)

Supposons $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ au voisinage de a .

Si $g \underset{a}{\to} \ell \in \mathbb{R}$ et $h \underset{a}{\to} \ell$ alors $f \underset{a}{\to} \ell$.

5°) Limite à droite, limite à gauche en un point

Déf : Soit $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$.

On note $\mathcal{D}^- = \mathcal{D} \cap]-\infty, a[$ et $\mathcal{D}^+ = \mathcal{D} \cap]a, +\infty[$.

On dit que f est définie au voisinage à droite en a (resp. à gauche) ssi $f_{|\mathcal{D}^+}$ (resp. $f_{|\mathcal{D}^-}$) est définie au voisinage de a .

L'éventuelle limite $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ de $f_{|\mathcal{D}^+}$ (resp. $f_{|\mathcal{D}^-}$) en a est alors appelée limite à droite (resp. à gauche) de f en a .

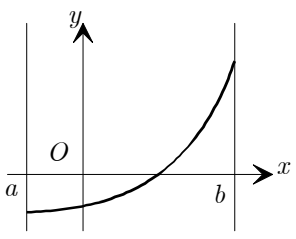
On la note $\ell = \lim_{a+} f = \lim_{x \to a+} f(x)$ (resp. $\ell = \lim_{a-} f = \lim_{x \to a-} f(x)$).

6°) Fonctions monotones sur un intervalle

Théorème :

Soit $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ tels que $a < b$ et $f :]a, b[\to \mathbb{R}$.

Si f est croissante alors f admet des limites (éventuellement infinies) en a et b . Plus précisément : $\lim_a f = \inf_{]a,b[} f$ et $\lim_b f = \sup_{]a,b[} f$.



Cor : Si f est décroissante alors f admet des limites en a et b .

Plus précisément : $\lim_a f = \sup_{]a,b[} f$ et $\lim_b f = \inf_{]a,b[} f$.

III. Continuité des fonctions réelles

1°) Définition

Déf : On dit que $f:\mathcal{D}\to\mathbb{R}$ est continue en un point $a\in\mathcal{D}$ ssi $f(x)\underset{x\to a}{\to}f(a)$.

Sinon, on dit que f est discontinue en a.

Déf : On dit que f est continue ssi f est continue en tout point $a\in\mathcal{D}$. On note $\mathcal{C}(\mathcal{D},\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions réelles définies et continues sur $\mathcal{D}$.

2°) Opérations sur les fonctions continues

Théorème :

Soit $f,g:\mathcal{D}\to\mathbb{R}$ et $\lambda\in\mathbb{R}$.

Si f et g sont continues alors $\lambda.f, f+g, fg$ le sont aussi.

De plus, si $\forall x\in\mathcal{D}, g(x)\neq 0$ alors f/g est continue.

Théorème :

Soit $f:\mathcal{D}\to\mathbb{R}$ et $\varphi:\mathcal{D}'\to\mathbb{R}$ telles que $f(\mathcal{D})\subset\mathcal{D}'$.

Si f et φ sont continues alors $\varphi\circ f$ l'est aussi.

Prop : Soit $f,g:\mathcal{D}\to\mathbb{R}$.

Si f et g sont continues alors $|f|$, $\sup(f,g)$ et $\inf(f,g)$ le sont aussi.

3°) Continuité à droite, continuité à gauche

Déf : Soit $f:\mathcal{D}\to\mathbb{R}$ et $a\in\mathcal{D}$.

Si f est définie à droite de a (resp. à gauche) on dit que f est continue à droite (resp. à gauche) en a ssi $f\underset{a^+}{\to}f(a)$ (resp. $f\underset{a^-}{\to}f(a)$).

Prop : Soit $f:\mathcal{D}\to\mathbb{R}$ et a un point de $\mathcal{D}$ tel que f soit définie à droite et à gauche de a ..

On a équivalence entre :

(i) f est continue en a,

(ii) f est continue à droite et à gauche en a.

4°) Restrictions et prolongement de fonctions continues

Prop : Soit $f:\mathcal{D}\to\mathbb{R}$ et $\Delta\subset\mathcal{D}$.

Si f est continue alors $f_{|\Delta}$ l'est aussi.

Déf : Soit $f:\mathcal{D}\to\mathbb{R}$ continue et $\tilde{\mathcal{D}}$ une partie de $\mathbb{R}$ contenant $\mathcal{D}$.

On appelle prolongement par continuité de f à $\tilde{\mathcal{D}}$ toute application $\tilde{f}:\tilde{\mathcal{D}}\to\mathbb{R}$ telle que :

1) $\tilde{f}$ prolonge f,

2) $\tilde{f}$ est continue sur $\tilde{\mathcal{D}}$.

Prop : Soit $f:\mathcal{D}\to\mathbb{R}$ continue et $a\in\mathbb{R}\setminus\mathcal{D}$ tel que f soit définie au voisinage de a.

Si $f\underset{a}{\to}\ell\in\mathbb{R}$ alors $\tilde{f}:\begin{cases}\mathcal{D}\cup\{a\}\to\mathbb{R}\\ x\mapsto\begin{cases}f(x)\text{ si }x\neq a\\ \ell\text{ si }x=a\end{cases}\end{cases}$ prolonge f par continuité à $\mathcal{D}\cup\{a\}$.

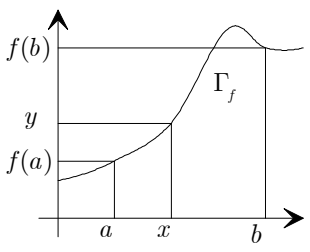
5°) Fonction continue sur un intervalle

a) théorème des valeurs intermédiaires

Théorème : (TVI)

Soit $f:I\to\mathbb{R}$ et $a,b\in I$ tels que $a\leq b$.

Si f est continue alors f prend toutes les valeurs intermédiaires comprises entre $f(a)$ et $f(b)$.



b) image d'un intervalle

Théorème :

L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

c) image d'un segment

Théorème :

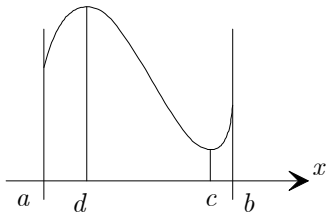
Soit $a,b \in \mathbb{R}$ tels que $a \le b$ et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$

Si f est continue alors f admet un minimum et un maximum.

On dit que f est bornée et atteint ses bornes. Ainsi :

$\exists c \in [a,b], \forall x \in [a,b], f(x) \ge f(c)$ et

$\exists d \in [a,b], \forall x \in [a,b], f(x) \le f(d)$.



Cor : L'image d'un segment par une fonction continue est un segment.

Plus précisément : $f([a,b]) = \left[\min_{[a,b]} f, \max_{[a,b]} f\right]$.

d) fonction continue strictement monotone

Théorème :

Soit I un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue strictement croissante.

1) $f(I)$ est un intervalle de même type que I et dont les extrémités sont les limites de f aux extrémités de I.

2) f réalise une bijection de I sur $f(I)$.

3) L'application réciproque $f^{-1} : f(I) \to I$ est continue, de même monotonie que I et les limites de f^{-1} aux extrémités de $f(I)$ sont les extrémités de I.

Cor : Par passage à l'opposé, on a un résultat semblable pour f continue et strictement décroissante sur I.

Prop : Soit $f : I \to J$ bijective.

Si f est continue alors f est strictement monotone et f^{-1} continue.

6°) Uniforme continuité

Déf : Soit $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$.

On dit que f est uniformément continue ssi:

$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x, y \in \mathcal{D}, |y - x| \le \alpha \Rightarrow |f(y) - f(x)| \le \varepsilon$.

Prop : Si $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ est uniformément continue alors f est continue.

Théorème : de Heine (Allemand XIX)

Toute fonction continue sur un segment y est uniformément continue.

IV. Extension aux fonctions complexes

1°) Définition

Déf : On appelle fonction complexe définie sur $\mathcal{D}$ toute application $f : \mathcal{D} \to \mathbb{C}$.

On note $\mathcal{F}(\mathcal{D}, \mathbb{C})$ ou $\mathbb{C}^{\mathcal{D}}$ l'ensemble de ces fonctions.

Déf : Soit $f : \mathcal{D} \to \mathbb{C}$. On définie les fonctions $\mathrm{Re}(f) : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$, $\mathrm{Im}(f) : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$, $|f| : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ et $\overline{f} : \mathcal{D} \to \mathbb{C}$ par $\forall t \in \mathcal{D}$, $\mathrm{Re}(f)(t) = \mathrm{Re}(f(t))$, $\mathrm{Im}(f)(t) = \mathrm{Im}(f(t))$, $|f|(t) = |f(t)|$ et $\overline{f}(t) = \overline{f(t)}$.

Déf : Une fonction $f : \mathcal{D} \to \mathbb{C}$ est dite bornée ssi $\exists M \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathcal{D}, |f(t)| \le M$.

Prop : $f : \mathcal{D} \to \mathbb{C}$ est bornée ssi $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ le sont.

2°) Limites

Soit $f : \mathcal{D} \to \mathbb{C}$ définie au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$.

Déf : On dit que f tend vers $\ell \in \mathbb{C}$ en a ssi $|f(t) - \ell| \underset{t \to a}{\to} 0$.

On note alors $f(t) \underset{t \to a}{\to} \ell$.

Déf : On dit que f converge en a ssi $\exists \ell \in \mathbb{C}$ tel que $f \underset{a}{\to} \ell$.

Sinon on dit que f diverge en a.

Prop : Si f converge en a alors $\exists ! \ell \in \mathbb{C}$ tel que $f \underset{a}{\to} \ell$.

Ce complexe ℓ est appelé limite de f en a et on note $\ell = \lim\limits_{t \to a} f(t)$.

3°) Théorème de convergence

Soit $f, g : \mathcal{D} \to \mathbb{C}$ définies au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$.

Prop : Si $f \underset{a}{\to} \ell \in \mathbb{C}$ alors $\overline{f} \underset{a}{\to} \overline{\ell}$ et $|f| \underset{a}{\to} |\ell|$.

Théorème :

Si f converge en a alors f est bornée au voisinage de a.

Théorème :

Si $f \underset{a}{\to} \ell \in \mathbb{C}$ et $g \underset{a}{\to} \ell' \in \mathbb{C}$ alors $f + g \underset{a}{\to} \ell + \ell'$, $fg \underset{a}{\to} \ell\ell'$ et si $\ell \neq 0$ alors $1/f \underset{a}{\to} 1/\ell$.

Théorème :

Soit $\ell \in \mathbb{C}$. On a équivalence entre :

(i) $f \underset{a}{\to} \ell$,

(ii) $\mathrm{Re}(f) \underset{a}{\to} \mathrm{Re}(\ell)$ et $\mathrm{Im}(f) \underset{a}{\to} \mathrm{Im}(\ell)$.

4°) Continuité

Déf : Soit $f : \mathcal{D} \to \mathbb{C}$.

On dit que f est continue en a point de $\mathcal{D}$ ssi $f(t) \underset{t \to a}{\to} f(a)$.

On dit que f est continue ssi f est continue en tout point de $\mathcal{D}$.

On note $\mathcal{C}(\mathcal{D}, \mathbb{C})$ l'ensemble des fonctions complexes continues sur $\mathcal{D}$.

Théorème :

Soit $f, g : \mathcal{D} \to \mathbb{C}$ et $\lambda \in \mathbb{C}$.

Si f et g sont continues alors $\lambda.f, f+g, fg, \overline{f}$ et $|f|$ le sont aussi.

Si de plus $\forall t \in \mathcal{D}, g(t) \neq 0$ alors $\dfrac{f}{g}$ est continue.

Théorème :

Soit $f : \mathcal{D} \to \mathbb{C}$.

(i) f est continue,

(ii) $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ le sont.

Prop : Soit $a \leq b$. Si $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ est continue alors f est bornée.

5°) Fonctions à valeurs dans $\mathbf{R^2}$

On note $d(a,b)$ la distance euclidienne entre deux éléments de $\mathbb{R}^2$.

Déf : On appelle fonction à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ définie sur $\mathcal{D}$ toute application $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}^2$. On note $\mathcal{F}(\mathcal{D}, \mathbb{R}^2)$ l'ensemble de ces fonctions.

Déf : Soit $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}^2$. Pour tout $t \in \mathcal{D}$, $f(t) = (x(t), y(t))$. Les fonctions réelles $x, y : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ sont appelées fonctions coordonnées de f.

Déf : Soit $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}^2$ définie au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$

On dit que f tend vers ℓ en a ssi $d(f(t), \ell) \xrightarrow[t \to a]{} 0$.

On dit alors que f converge vers ℓ en a et on montre aisément que cet élément ℓ est unique. On l'appelle limite de f en a, notée $\lim\limits_{a} f$.

Prop : Soit $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}^2$ définie au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$ et $\ell = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.

On a équivalence entre :

(i) $f \xrightarrow[a]{} \ell$.

(ii) $x(t) \xrightarrow[t\to a]{} x_0$ et $y(t) \xrightarrow[t\to a]{} y_0$.

Déf : On dit que f est continue en $a \in \mathcal{D}$ ssi $f(t) \xrightarrow[t\to a]{} f(a)$.

On dit que f est continue ssi elle l'est en tout $a \in \mathcal{D}$.

Prop : f est continue ssi ses fonctions coordonnées le sont.

V. Comparaison des fonctions numériques

Les fonctions considérées ici sont réelles ou complexes et supposées définies et continues sur un même voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$.

1°) Fonction négligeable devant une autre

φ et ψ désignent des fonctions ne s'annulant pas au voisinage de a sauf peut-être en a .

Déf : Une fonction f est dite négligeable devant φ en a ssi $\dfrac{f}{\varphi} \xrightarrow[a]{} 0$.

On note alors : $f = \underset{a}{o}(\varphi)$, $f(x) = o(\varphi(x))$ ou $f(x) \ll \varphi(x)$ quand $x \to a$.

Prop : Si $f = \underset{a}{o}(\lambda.\varphi)$ (avec $\lambda \neq 0$) alors $f = \underset{a}{o}(\varphi)$.

Si $f = \underset{a}{o}(\varphi)$ et $g = \underset{a}{o}(\varphi)$ alors $f + g = \underset{a}{o}(\varphi)$.

Si $f = \underset{a}{o}(\varphi)$ alors $f\psi = \underset{a}{o}(\varphi\psi)$.

Prop : $f = \underset{a}{o}(\varphi)$ si et seulement si on $f(x) = \varphi(x)\varepsilon(x)$ avec $\varepsilon \to 0$.

Prop : Si $f = \underset{a}{o}(\varphi)$ et $\varphi = \underset{a}{o}(\psi)$ alors $f = \underset{a}{o}(\psi)$.

2°) Fonction dominée par une autre

φ et ψ désignent des fonctions ne s'annulant pas au voisinage de a sauf peut-être en a .

Déf : On dit que f est dominée par φ en a ssi f/φ est bornée au voisinage de a , on note alors $f = \underset{a}{O}(\varphi)$ ou $f(x) = O(\varphi(x))$ quand $x \to a$.

Prop : Si $f = \underset{a}{O}(\lambda.\varphi)$ et $\lambda \neq 0$ alors $f = \underset{a}{O}(\varphi)$.

Si $f = \underset{a}{O}(\varphi)$ et $g = \underset{a}{O}(\varphi)$ alors $f + g = \underset{a}{O}(\varphi)$.

Si $f = \underset{a}{O}(\varphi)$ alors $f\psi = \underset{a}{O}(\varphi\psi)$.

Prop : Au voisinage de a :

Si $f = \underset{a}{o}(\varphi)$ et $\varphi = \underset{a}{O}(\psi)$ alors $f = \underset{a}{o}(\psi)$.

Si $f = \underset{a}{O}(\varphi)$ et $\varphi = \underset{a}{o}(\psi)$ alors $f = \underset{a}{o}(\psi)$.

Si $f = \underset{a}{O}(\varphi)$ et $\varphi = \underset{a}{O}(\psi)$ alors $f = \underset{a}{O}(\psi)$.

3°) Croissance comparée des fonctions usuelles

a) comparaison en $+\infty$

Prop : (fonction de même type)

Quand $x \to +\infty$

Pour $\alpha < \beta$: $x^\alpha = o(x^\beta)$ et $(\ln x)^\alpha = o((\ln x)^\beta)$.

Pour $0 < a < b$: $a^x = o(b^x)$.

Prop : (fonction de limite $+\infty$)

Quand $x \to +\infty$

Pour $\alpha, \beta > 0$ et $a > 1$: $(\ln x)^\beta = o(x^\alpha)$ et $x^\alpha = o(a^x)$.

Prop : (fonction de limite nulle)

Quand $x \to +\infty$

Pour $\alpha, \beta > 0$ et $0 < a < 1$: $a^x = o\left(1/x^\alpha\right)$ et $1/x^\alpha = o(1/(\ln x)^\beta)$.

b) comparaison en 0

Prop : Quand $x \to 0$:

Pour $\alpha < \beta$: $x^\beta = o(x^\alpha)$.

Pour $\alpha > 0$: $\ln x = o\left(\dfrac{1}{x^\alpha}\right)$ et $x^\alpha = o\left(\dfrac{1}{\ln x}\right)$

4°) Fonctions équivalentes

Les fonctions considérées ne s'annulent pas au voisinage de a sauf peut être en a.

a) définition

Déf : On dit que f est équivalente à g en a ssi $f/g \underset{a}{\to} 1$.

On note alors $f \underset{a}{\sim} g$ ou $f(x) \sim g(x)$ quand $x \to a$.

Prop : Si $f \underset{a}{\sim} g$ alors $g \underset{a}{\sim} f$.

Si $f \underset{a}{\sim} g$ et $g \underset{a}{\sim} h$ alors $f \underset{a}{\sim} h$.

Prop : On a équivalence entre :

(i) $f \underset{a}{\sim} g$,

(ii) $f = g + \underset{a}{o}(g)$,

b) applications des équivalents

Théorème :

Si $f \underset{a}{\sim} g$ et $g \underset{a}{\to} \ell \in \overline{\mathbb{R}}$ ou $\ell \in \mathbb{C}$ alors $f \underset{a}{\to} \ell$.

Théorème :

Supposons que f et g soient des fonctions réelles.

Si $f \underset{a}{\sim} g$ alors $f(x)$ et $g(x)$ ont même signe au voisinage de a.

Prop : Au voisinage de a : Si $f \underset{a}{\sim} g$ alors $f = \underset{a}{O}(g)$ et $g = \underset{a}{O}(f)$.

Prop : Au voisinage de a :

Si $f \underset{a}{\sim} g$ et $g = \underset{a}{o}(h)$ alors $f = \underset{a}{o}(h)$.

Si $f \underset{a}{\sim} g$ et $g = \underset{a}{O}(h)$ alors $f = \underset{a}{O}(h)$.

Si $f = \underset{a}{o}(g)$ et $g \underset{a}{\sim} h$ alors $f = \underset{a}{o}(h)$.

Si $f = \underset{a}{O}(g)$ et $g \underset{a}{\sim} h$ alors $f = \underset{a}{O}(h)$.

c) détermination d'équivalents

Théorème :

Si $f_1 \underset{a}{\sim} g_1$ et $f_2 \underset{a}{\sim} g_2$ alors $f_1 f_2 \underset{a}{\sim} g_1 g_2$ et $f_1/f_2 \underset{a}{\sim} g_1/g_2$.

Si $f \underset{a}{\sim} g$ alors $\forall p \in \mathbb{Z}, f^p \underset{a}{\sim} g^p$.

Théorème :

Supposons que f et g soient à valeurs réelles strictement positives sauf peut être en a.

Si $f \underset{a}{\sim} g$ alors $\forall \alpha \in \mathbb{R}, f^\alpha \underset{a}{\sim} g^\alpha$.

Prop : Si $f \underset{a}{\to} 0$ alors $\sin f \underset{a}{\sim} f, \tan f \underset{a}{\sim} f$ et $\ln(1+f) \underset{a}{\sim} f$.

Cas particulier : Quand $x \to 0$: $\sin x \sim x$ et $\ln(1+x) \sim x$.

Prop : Soit f et g deux fonctions à valeurs strictement positives.

Si $f \underset{a}{\sim} g$ et $g \underset{a}{\to} \ell$ avec $\ell = 0^+, \ell \in \mathbb{R}^{+*} \setminus \{1\}$ ou $\ell = +\infty$ alors $\ln f \underset{a}{\sim} \ln g$.